

# 多循环频率时差-Doppler 估计方法及性能分析

黄知涛 姜文利 周一宇

国防科技大学电子科学与工程学院研究所, 长沙 410073

**摘要** 单循环频率循环估计子由于只利用了单个循环频率处的信号信息, 其估计性能及适用条件受到了较大限制. 针对这一局限性, 文中研究了综合利用多循环频率信号信息的多循环频率循环估计子, 其基本思路是将多个单循环频率循环估计子按一定准则融合在一起, 解决单循环频率循环估计子面临的困难. 文中还以时差估计为例, 详细推导了多循环频率循环估计子对时差的估计理论精度, 并不加推导地给出了频移估计的理论精度. 理论计算和数字仿真实验结果均说明多循环频率循环估计子确实具有较单循环频率循环估计子和传统相关方法更好的估计性能, 并且这种估计方法具有较好地适应不同特性噪声的能力.

**关键词** 循环估计子 时差估计 Doppler 估计 多循环频率 精度分析

20世纪90年代初 Gardner 等详细研究了<sup>[1, 2]</sup>对循环平稳信号的时差估计方法. 考虑到实际中经常需要对信号的 Doppler 频移进行补偿, 作者研究了对循环平稳信号的时差-Doppler 联合估计方法<sup>[3]</sup>. 仔细分析这些循环估计方法的性质<sup>[1, 3-6]</sup>可以发现, 它们都具有如下的特点: 首先, 循环估计子具有较传统估计方法更好地适应不同特性噪声的能力; 其次, 循环估计子具有很好的信号选择能力; 最后, 循环估计子的估计性能是与所选择的循环频率密切相关的. 循环估计子的第三个特点使得其在实际使用中存在如下的局限性: 首先, 在使用前必须确定哪个循环频率处循环估计子能够达到相对最好的估计性能, 这需要事先对所处理信号的循环平稳特性有较详细的了解; 其次, 该循环估计子只利用了单个循环频率处的信号信息, 而忽略了其他循环频率所带有的信息, 这意味着该循环估计子不能达到最佳的处理效果. 为解决循环估计子在实际使用中存在的问题, 尽可能提高对信号参数的估计精度, 有必要研究综合利用多个循环频率处信号信息的多循环频率循环估计方法.

## 1 信号模型

不失一般性, 设目标反射信号为  $s(t)$ , 接收系统接收到的两路目标回波信号为  $y(t)$  和  $x(t)$

$$x(t) = r_1 s(t) + n_1(t), \quad (1)$$

$$y(t) = r_2 s(t - D) e^{-j2\pi f_d t} + n_2(t), \quad (2)$$

其中  $D$ ,  $f_d$  分别是回波信号相对于参考信号的时差和 Doppler 频移, 此处  $r_1$ ,  $r_2$  包括各种幅度衰减和通道不一致性而引起的相差. 并对上述信号环境做出如下两点假设: 假设 1, 信号  $s(t)$  是循环频率为  $\alpha$  的循环平稳信号; 假设 2, 噪声  $n_1(t)$ ,  $n_2(t)$  是互不相关的, 且在循环频率  $\alpha$  处不具有谱相关特性<sup>[4]</sup>. 假设 2 对一般平稳噪声都是成立的, 对于非平稳噪声, 只要不是人为故意设计, 一般也是成立的. 由假设 1、假设 2 可以知道, 信号  $s(t)$  与噪声  $n_1(t)$ ,  $n_2(t)$  是互不循环相关的. 限于文章篇幅, 循环平稳信号处理方法的有关内容参见文献<sup>[7]</sup>.

文献<sup>[3]</sup>详细研究了对时差和频移的联合估计方法, 并得到如下结果

2004-07-31 收稿, 2004-08-30 收修改稿

E-mail: talld7762@sina.com

$$(u = D, f = f_d) = \arg \left( \max_{u, f} \left| C_{y, x}^{\alpha-f, \alpha}(u, f) \right| \right), \quad (3)$$

其中循环互模糊函数  $C_{y, x}^{\alpha-f, \alpha}(u, f)$  定义如下

$$C_{y, x}^{\alpha-f, \alpha}(u, f) \triangleq \int R_{y, x}^{\alpha-f}(\tau) (R_x^{\alpha}(\tau - u))^* e^{j\pi f \tau} d\tau \quad (4)$$

式中  $R_{y, x}^{\alpha-f}(\tau)$  为  $y(t)$  和  $x(t)$  在循环频率  $\alpha f$  处的循环互相关函数<sup>[1]</sup>, 而  $R_x^{\alpha}(\tau)$  为  $x(t)$  在循环频率  $\alpha$  处的循环自相关函数<sup>[1]</sup>.

由(3)式可看出, 对时差  $D$  和频移  $f_d$  的估计依赖于对循环频率  $\alpha$  的选择, 称(3)式所示的估计方法为单循环频率联合估计方法. 通常, 循环平稳信号的循环频率不是惟一的, 如二相编码调制(BPSK)信号、四相编码调制(QPSK)信号都有无穷多个循环频率<sup>[7]</sup>.

## 2 多循环频率时差-Doppler 联合估计方法

单循环频率循环估计子是通过寻找单循环频率循环互模糊函数最大值对应的时间和频率位置实现对目标回波时差和 Doppler 频移估计的. 为同时利用多个循环频率处的信号信息, 可考虑对多个单循环频率循环模糊函数进行融合处理, 构建多循环频率循环互模糊函数. 在此基础上研究对目标回波时差和 Doppler 频移的估计方法.

设  $\alpha_i$  是信号  $s(t)$  循环频率集  $A$  (所有循环频率组成的集合) 中的任意循环频率, 即  $\alpha_i \in A$ ;  $C_{y, x}(u, f)$  为信号  $y(t)$  和  $x(t)$  的多循环频率循环互模糊函数, 定义为

$$C_{y, x}(u, f) \triangleq \sum_{\alpha_i \in A} w_i C_{y, x}^{\alpha_i-f, \alpha_i}(u, f), \quad (5)$$

将(4)式代入到上式有

$$C_{y, x}(u, f) \triangleq \sum_{\alpha_i \in A} w_i \int R_{y, x}^{\alpha_i-f}(\tau) (R_x^{\alpha_i}(\tau - u))^* e^{j\pi f \tau} d\tau, \quad (6)$$

其中  $w_i$  是对单循环频率循环互模糊函数的加权值, 且满足  $w_i \geq 0$ .

将(1)式代入到循环自相关函数的定义式<sup>[7]</sup>, 可

计算得到在循环频率  $\alpha_i$  处的循环自相关函数  $R_x^{\alpha_i}(\tau)$

$$R_x^{\alpha_i}(\tau) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t + \tau/2) x(t - \tau/2)^* e^{-j2\pi \alpha_i t} dt = r_1^2 R_x^{\alpha_i}(\tau) + r_1 R_{x, n_1}^{\alpha_i}(\tau) + R_{n_1}^{\alpha_i}(\tau), \quad (7)$$

根据假设 2, 上式可简化为

$$R_x^{\alpha_i}(\tau) = r_1^2 R_x^{\alpha_i}(\tau), \quad (8)$$

同理, 将(1), (2)两式代入到循环互相关函数的定义式<sup>[7]</sup>, 可计算得到在循环频率  $\alpha_i f$  处的循环互相关函数  $R_{y, x}^{\alpha_i-f}(\tau)$

$$R_{y, x}^{\alpha_i-f}(\tau) = r_1 r_2 e^{-j\pi f_d \tau} e^{-j\pi(\alpha_i - f + f_d) D} R_{y, x}^{\alpha_i-f+f_d}(\tau - D), \quad (9)$$

将(8), (9)两式代入(5)式, 可以得到信号  $y(t)$  和  $x(t)$  的多循环频率循环互模糊函数  $C_{y, x}(u, f)$

$$C_{y, x}(u, f) = \sum_{\alpha_i \in A} w_i r_1^3 r_2 e^{-j\pi(\alpha_i - f + f_d) D} \int R_{y, x}^{\alpha_i-f+f_d}(\tau - D) (R_x^{\alpha_i}(\tau - u))^* e^{j\pi(f-f_d)\tau} d\tau, \quad (10)$$

显然

$$|C_{y, x}(u, f)| \leq \sum_{\alpha_i \in A} w_i r_1^3 r_2 \left| \int R_{y, x}^{\alpha_i-f+f_d}(\tau - D) (R_x^{\alpha_i}(\tau - u))^* e^{j\pi(f-f_d)\tau} d\tau \right|, \quad (11)$$

根据 Schwartz 不等式知道

$$|C_{y, x}(u, f)| \leq \sum_{\alpha_i \in A} w_i r_1^3 r_2 \left| \int R_{y, x}^{\alpha_i}(\tau - D) \right|^2 d\tau = \sum_{\alpha_i \in A} w_i r_1^3 r_2 \int |R_x^{\alpha_i}(\tau)|^2 d\tau, \quad (12)$$

且等号成立的条件是

$$u = D \quad \text{和} \quad f = f_d. \quad (13)$$

(12), (13)两式说明, 时差和 Doppler 频移可通过下式得到

$$(u = D, f = f_d) = \arg \left( \max_{u, f} |C_{y, x}(u, f)| \right), \quad (14)$$

在观测时间长度  $T$  有限的情况下只能得到对真实值  $D, f_d$  的估计  $\hat{D}, \hat{f}_d$ , 即

$$(u = \hat{D}, f = \hat{f}_d) = \arg\left(\max_{u, f} |C_{y,x}(u, f)|\right). \quad (15)$$

关于加权值  $w_i$  的确定可参见文献[4]的讨论. 在此直接利用文献[4]的结论: 只有等权相加才能使输出信噪比最大. 因此, (5)式定义的多循环频率循环模糊函数  $C_{y,x}(u, f)$  可简化成下面的形式

$$C_{y,x}(u, f) = \sum_{a_i \in A} C_{y,x}^{a_i, f, a_i}(u, f) = \sum_{a_i \in A} \int R_{y,x}^{a_i, f}(\tau) (R_x^{a_i}(\tau - u))^* e^{j\tau f} d\tau. \quad (16)$$

### 3 多循环频率时差估计性能分析

下面以时差估计为例来详细分析说明多循环频率循环估计子的估计性能, 文章还不加证明地给出频移估计精度表达式.

为讨论问题的方便, 先分析双循环频率循环估计子的估计性能, 多循环频率循环估计子的估计性能可在此基础上得到. 在估计时差时, 为讨论问题的方便假定  $f_d = 0$ .

由于  $|C_{y,x}(u, f)|$  与  $|C_{y,x}(u, f)|^2$  具有相同的峰值点和零点位置, 因此, 由(15)式知道, 对时差的估计还可通过下式得到

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} |C_{y,x}(u, 0)|^2\right]_{u=\hat{D}} = 0, \quad (17)$$

将(1), (2)两式代入到(16)式有

$$C_{y,x}(u, 0) = \sum_{i=1,2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [r_1 r_2 e^{-j\tau a_i D} R_{y_i}^{a_i}(\tau - D) + r_1 R_{n_2, s}^{a_i}(\tau) + R_{n_2, n_1}^{a_i}(\tau) + r_2 e^{-j\tau a_i D} R_{n_1}^{a_i}(\tau - D)] \cdot [r_1^2 R_x^{a_i}(\tau - u) + r_1 R_{n_1, s}^{a_i}(\tau - u) + r_1 R_{n_1, n_1}^{a_i}(\tau - u) + R_{n_1}^{a_i}(\tau - u)]^* d\tau \right\}, \quad (18)$$

将上式积分号内乘积展开, 并且忽略二次噪声干扰项的影响(假设在进行参数估计时, 信噪比是较高的)近似有

$$C_{y,x}(u, 0) \approx \sum_{i=1,2} \{ r_1^3 r_2 e^{-j\tau a_i D} \varphi_{s_i}^{a_i}(u - D) + r_1^3 \varphi_{n_2, s}^{a_i}(u) + r_1^2 r_2 e^{-j\tau a_i D} (\varphi_{n_1, s}^{a_i}(D - u))^* + r_1^2 r_2 e^{-j\tau a_i D} (\varphi_{s_i, n_1}^{a_i}(D - u))^* + r_1^2 r_2 e^{-j\tau a_i D} \varphi_{s_i, n_1}^{a_i}(u - D) \} \\ = \sum_{i=1,2} (r_1^3 r_2 T_s^i + r_1^3 T_{n_2}^i + r_1^2 r_2 T_{n_1}^i), \quad (19)$$

其中

$$\varphi_{n_1, s}^{a_i}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{n_1, s}^{a_i}(\tau) (R_s^{a_i}(\tau - u))^* d\tau, \quad l = 1, 2, \quad (20)$$

$$\varphi_{s_i, n_1}^{a_i}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{s_i, n_1}^{a_i}(\tau) (R_s^{a_i}(\tau - u))^* d\tau, \quad l = 1, 2, \quad (21)$$

同理, 在计算  $|C_{y,x}(u, \cdot)|^2$  时忽略二阶噪声干扰项的影响, 并利用(19)式的结果, 近似有

$$|C_{y,x}(u, 0)|^2 \approx r_1^6 r_2^2 [ |T_s^1|^2 + |T_s^2|^2 + 2\text{Re}(T_s^1 T_s^2) ] + 2r_1^5 r_2 \text{Re}\{ [T_s^1 + T_s^2] \cdot [r_2 T_{n_1}^1 + r_2 T_{n_1}^2 + r_1 T_{n_2}^1 + r_1 T_{n_2}^2]^* \}, \quad (22)$$

将(22)式代入到(17)式近似有

$$r_1 r_2 \frac{\partial}{\partial u} [ |T_s^1|^2 + |T_s^2|^2 + 2\text{Re}(T_s^1 T_s^2) ]_{u=\hat{D}} + 2 \frac{\partial}{\partial u} \text{Re}\{ [T_s^1 + T_s^2] \cdot [r_2 T_{n_1}^1 + r_2 T_{n_1}^2 + r_1 T_{n_2}^1 + r_1 T_{n_2}^2]^* \}_{u=\hat{D}} = 0, \quad (23)$$

将(23)式在  $u=D$  处展开成 Taylor 级数, 并且对第 1 项取一阶近似, 对第 2 项只取一项近似

$$r_1 r_2 \frac{\partial}{\partial u} [ |T_s^1|^2 + |T_s^2|^2 + 2\text{Re}(T_s^1 T_s^2) ]_{u=D} + r_1 r_2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} [ |T_s^1|^2 + |T_s^2|^2 + 2\text{Re}(T_s^1 T_s^2) ]_{u=D} \cdot (\hat{D} - D) + 2 \frac{\partial}{\partial u} \text{Re}\{ [T_s^1 + T_s^2] \cdot [r_2 T_{n_1}^1 + r_2 T_{n_1}^2 + r_1 T_{n_2}^1 + r_1 T_{n_2}^2]^* \}_{u=D} = 0, \quad (24)$$

(24)式中第1项为零,于是可求得估值  $\hat{D}$  与真值  $D$  之差为

$$(\hat{D} - D) = - \frac{2 \frac{\partial}{\partial u} \text{Re}\{ [T_i^1 + T_i^2] \cdot [r_2 T_{n_1}^1 + r_2 T_{n_1}^2 + r_1 T_{n_2}^1 + r_1 T_{n_2}^2]^* \}_{u=D}}{r_1 r_2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} [ |T_i^1|^2 + |T_i^2|^2 + 2\text{Re}(T_i^1 T_i^2) ]_{u=D}} \quad (25)$$

由(25)式不难计算得到估值  $\hat{D}$  的均值和方差  $\sigma_{\hat{D},D}^2$ , 分别如下式所示

$$E[\hat{D} - D] = 0, \quad (26)$$

$$\sigma_{\hat{D},D}^2 \stackrel{\Delta}{=} E[(\hat{D} - D)^2] = \frac{E\left\{ \left[ 2 \frac{\partial}{\partial u} \text{Re}\{ [T_i^1 + T_i^2] \cdot [r_2 T_{n_1}^1 + r_2 T_{n_1}^2 + r_1 T_{n_2}^1 + r_1 T_{n_2}^2]^* \}_{u=D} \right]^2 \right\}}{\left\{ r_1 r_2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} [ |T_i^1|^2 + |T_i^2|^2 + 2\text{Re}(T_i^1 T_i^2) ]_{u=D} \right\}^2}, \quad (27)$$

(26)式说明, 估值  $\hat{D}$  是对真值  $D$  的一个无偏估计.

对(27)式化简后可得到估值的均方误差为(详细的推导见附录)

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{D},D}^2 \approx & [(\varphi_i^{s_1}(0))^2 + (\varphi_i^{s_2}(0))^2 + 2\cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D)\varphi_i^{s_1}(0)\varphi_i^{s_2}(0)] / 4\pi^2 \{ \varphi_i^{s_1}(0)B_{a_1}^2 [\varphi_i^{s_1}(0) + \varphi_i^{s_2}(0)\cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D)] + \\ & \varphi_i^{s_2}(0)B_{a_2}^2 [\varphi_i^{s_2}(0) + \varphi_i^{s_1}(0)\cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D)] + \varphi_i^{s_1}(0)\varphi_i^{s_2}(0)\cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D)(\bar{f}_{a_1} - \bar{f}_{a_2})^2 \}^2. \\ & \left[ K_{n_1}^{s_1} \varphi_i^{s_1}(0)(B_{a_1}^2 + \bar{f}_{a_1}^2) + K_{n_2}^{s_2} \varphi_i^{s_2}(0)(B_{a_2}^2 + \bar{f}_{a_2}^2) + 5 \frac{K_{n_1}^{s_1} \varphi_i^{s_1}(0)(B_{a_1}^2 + \bar{f}_{a_1}^2) + K_{n_2}^{s_2} \varphi_i^{s_2}(0)(B_{a_2}^2 + \bar{f}_{a_2}^2)}{r_1^2} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

当取  $i=1$  时, 双循环频率循环估计子退化成单循环频率循环估计子. 并且, 根据(28)式可以得到单循环频率循环估计子的估计均方误差  $\sigma_{\hat{D},D}^2$  为

$$\sigma_{\hat{D},D}^2 \approx \frac{(1 + \bar{f}^2/B_a^2)(r_1^2 K_2 + r_2^2 K_1)}{8\pi^2 r_1^2 r_2^2 B_a^2 \varphi_i^s(0)} = \frac{1 + \bar{f}^2/B_a^2}{8\pi^2 B_a^2 \varphi_i^s(0)} \left[ \frac{K_2}{r_2^2} + \frac{5K_1}{r_1^2} \right]. \quad (29)$$

根据(28)式推导过程及结果不难得到三循环频率循环时差估计子的估计均方误差为

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{D},D}^2 \approx & \left[ \sum_{i=1,2,3} (\varphi_i^s(0))^2 + 2\cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D)\varphi_i^s(0)\varphi_i^s(0) + 2\cos(\pi(\alpha_3 - \alpha_1)D)\varphi_i^s(0)\varphi_i^s(0) + 2\cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_3)D)\varphi_i^s(0)\varphi_i^s(0) \right] / \\ & 8\pi^2 a^2 \{ \varphi_i^s(0)B_{a_1}^2 \sum_{1,2,3} \varphi_i^s(0)\cos(\pi(\alpha_i - \alpha_1)D) + \varphi_i^s(0)B_{a_2}^2 \sum_{1,2,3} \varphi_i^s(0)\cos(\pi(\alpha_i - \alpha_2)D) + \\ & \varphi_i^s(0)B_{a_3}^2 \sum_{1,2,3} \varphi_i^s(0)\cos(\pi(\alpha_i - \alpha_3)D) + \varphi_i^s(0)\cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D)(\bar{f}_{a_1} - \bar{f}_{a_2})^2 + \\ & \varphi_i^s(0)\varphi_i^s(0)\cos(\pi(\alpha_3 - \alpha_1)D)(\bar{f}_{a_1} - \bar{f}_{a_3})^2 + \varphi_i^s(0)\varphi_i^s(0)\cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_3)D)(\bar{f}_{a_3} - \bar{f}_{a_2})^2 \}^2. \\ & \left[ \frac{3 \sum_{1,2,3} K_{n_1}^{s_1} \varphi_i^s(0)(B_{a_1}^2 + \bar{f}_{a_1}^2)}{r_1^2} + \frac{3 \sum_{1,2,3} K_{n_2}^{s_2} \varphi_i^s(0)(B_{a_2}^2 + \bar{f}_{a_2}^2)}{r_2^2} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

与(30)式近似的推导过程可以得到三循环频率循环频移估计子的估计精度为(受篇幅限制, 这里不给出具体的证明过程)

其中

$$\Gamma_a^2 \stackrel{\Delta}{=} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |R_i^a(\tau)|^2 d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} |R_i^a(\tau)|^2 d\tau} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |R_i^a(\tau)|^2 d\tau}{\varphi_i^s(0)}. \quad (32)$$

$$\sigma_{\hat{D},f_d}^2 \approx \frac{3 \sum_{1,2,3} K_{n_1}^{s_1} \varphi_i^s(0) \Gamma_a^2}{2a^2 \pi^2 \left\{ \sum_{1,2,3} [4T^2 \varphi_i^s(0) + \varphi_i^s(0) \Gamma_a^2] \right\}^2}, \quad (31)$$

### 4 仿真实验及分析

以下对多循环频率时差-Doppler 联合估计子及其时差估计性能进行仿真分析,并与单循环频率循环时差估计子和传统互相关时差估计方法估计性能进行比较. 仿真对象为二相编码(BPSK)信号,BPSK的循环平稳特性分析参见文献[4, 7]; Monte-Carlo模拟次数为 10000, Doppler 频移为 20 Hz, 采样间隔  $T_s=10^{-7}$  s, 回波信号真实时延  $D$  为  $18 T_s$ , 信号载频为  $f_0=2$  MHz, 码片宽度  $T_c=32 T_s$ ,  $\alpha$  为信号的循环频率, SNR 为回波信号信噪比,  $R$ -SNR 为参考信号信噪比. 其中, 仿真图例中的“alpha”表示循环估计子(组)所选择的循环频率. 其中, “alpha=0”即为文献[1, 2]中介绍的 GCC 估计方法.

仿真中使用了平稳 Gauss 白噪声和时变 Gauss 白噪声两种噪声模型, 其中慢变化时变 Gauss 白噪

声信号模型参考了文献[5] 的噪声模型, 该白噪声的方差是一个 Gauss 分布变量的平方. 用  $\sigma_N$  表示时变 Gauss 噪声的方差, 且该方差的均值为  $u_N = E[\sigma_N]$ , 衡量时变噪声变化快慢的量是方差偏移系数, 用  $\rho_N$  表示, 定义为  $\rho_N = (E[\sigma_N^2] - u_N^2) / u_N^2$ .  $\rho_N = 0$  对应平稳 Gauss 白噪声信号模型,  $\rho_N \neq 0$  对应时变 Gauss 白噪声模型. 和文献[5]一样, 在以下仿真试验中时变 Gauss 噪声的方差偏移系数  $\rho_N$  取为 0.1.

图 1 给出了在  $R$ -SNR = SNR = -5 dB 条件下三循环频率循环互模糊函数和传统互模糊函数幅度图. 由仿真结果可见, 三循环频率循环互模糊函数和传统互模糊函数都会出现一个相关峰, 根据该相关峰对应的  $u, f$  位置 ( $u = 18 T_s, f = 20$ ), 可以得到正确的参数估值. 该仿真说明文章研究得到的多循环频率时差-Doppler 联合估计子是正确的.

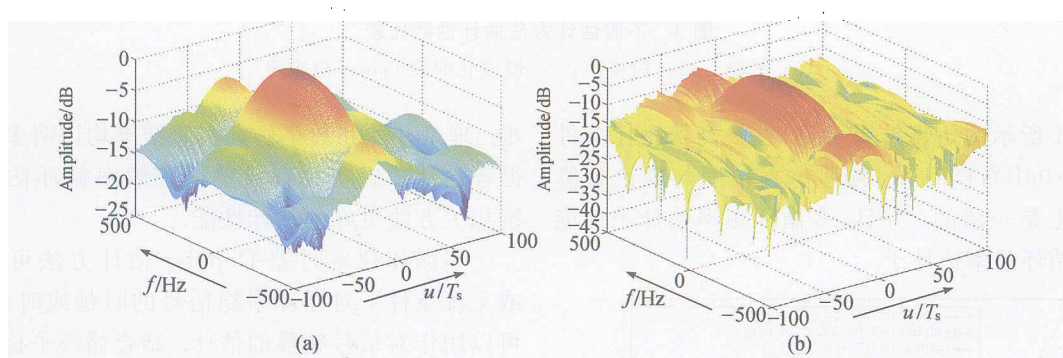


图 1 两种不同互模糊函数计算结果

$R$ -SNR = -5dB, SNR = -5dB

(a) 三循环频率循环互模糊函数; (b) 传统互模糊函数

图 2 显示, 在参考通道信噪比  $R$ -SNR 为 0dB 时, 单/三循环频率循环估计子的仿真精度与理论精度在较高信噪比 ( $SNR > -6$  dB) 时是很接近的, 而在信噪比变低 ( $SNR < -6$  dB) 时仿真精度与理论精度开始出现差距, 并且这种差距随着信噪比的降低而逐渐加大. 这是因为, 在较高信噪比时推导理论估计精度的前提是满足的, 因此仿真精度与理论精度是近似一致的, 而随着信噪比的下降, 推导理论估计精度的前提开始变得不再成立, 高次噪声干扰项开始起作用, 并且随着信噪比的降低其作用越来越明显, 因此仿真精度与理论精度差距开始变大. 仿真结果说

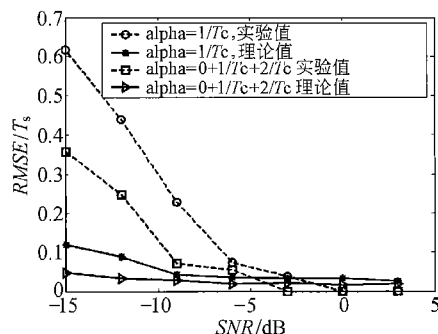


图 2 单/三循环频率循环估计子仿真精度与理论精度比较

$R$ -SNR = 0dB

明文章推导估计精度的分析过程是正确的,得到的精度公式也是正确的。

图3仿真比较了传统互相关时差估计方法(cross-correlation method)、单循环频率循环估计子和多循环频率循环估计子在平稳/慢变化时变 Gauss 白噪声背景和参考通道信噪比  $R\text{-SNR} = 0$  dB 水平条件下的估计精度。从仿真结果可看出,三循环频率循环估计子组估计性能要优于双循环频率循环估计

子组,双循环频率循环估计子组估计性能要优于传统互相关估计方法,传统互相关估计方法与单循环频率循环估计子估计性能近似一致。这说明,充分利用信号特征信息的多循环频率循环估计子的估计性能较单循环频率循环估计子和传统互相关估计方法估计性能有较明显的改善,能够在更低信噪比条件下得到更好的估计性能。

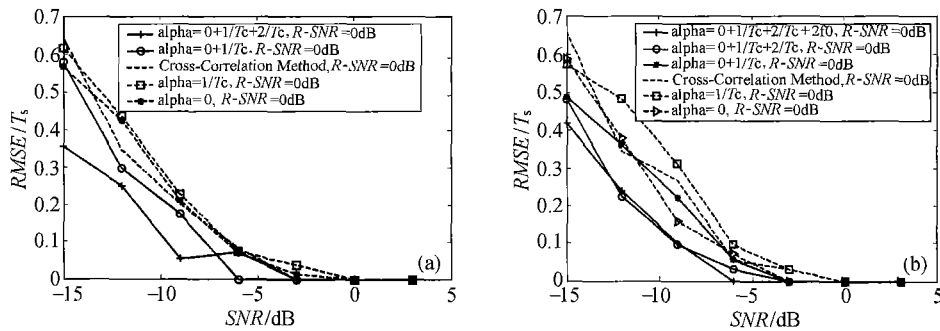


图3 不同估计方法估计性能比较

(a) 平稳 Gauss 白噪声; (b) 慢变化时变 Gauss 白噪声

由图4所示的仿真结果可见,在较高信噪比条件下 ( $\text{SNR} > 0$  dB), Doppler 频移仿真精度与理论计算精度基本上是一致的。并且,多循环频率估计子性能要好于单循环频率估计子。

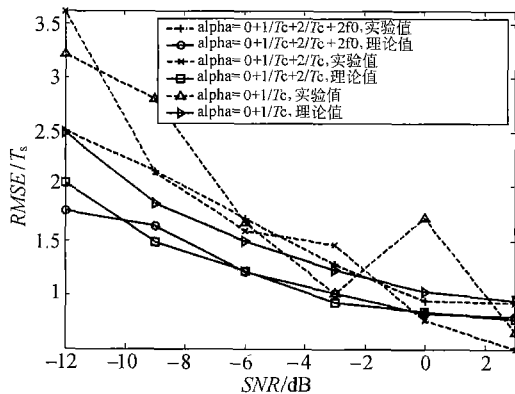


图4 多循环频率循环估计子频率估计理论精度与仿真精度比较  
 $R\text{-SNR} = 0$  dB.

## 5 总结

文章研究得到了多循环频率时差-Doppler 估计方法,有效地解决了单循环频率循环估计子面临的困

难。理论计算和数字仿真实验结果均说明多循环频率循环估计子确实具有较单循环频率循环估计子和传统相关方法更好的估计性能。

多循环频率时差-Doppler 估计方法可用于有源或无源条件下对循环平稳信号的时延或时差估计,还可以用作对信号频移的估计。结合循环平稳处理方法固有的优越性,新方法特别适合处理低信噪比条件下噪声特性时变或存在多种干扰时对有用信号的检测及参数提取。作者已将多循环频率时差 Doppler 联合估计方法用于外辐射源目标探测系统中的信号处理(参见文献[6]),取得了较好的效果。

## 附录: 双循环频率循环估计子时差估计精度公式推导

在零均值平稳 Gauss 白噪声背景下推导双循环频率循环估计子时差估计精度公式。

已经证明<sup>[4]</sup>, 平稳 Gauss 白噪声与循环平稳信号的循环互相关函数仍为平稳噪声,并且在观测时间足够长时可近似为白噪声。因此,再根据假设 2, (19)式定义的随机过程  $T_{n_2}^i$  和  $T_{n_1}^i$  可近似认为是互不相关的白噪声。从而(27)式可简化为

$$\sigma_{e,D}^2 \approx \frac{E\left\{\left[\frac{2}{r_1} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial u} \{ [T_s^1 + T_s^2] \times [T_{n_1}^1 + T_{n_1}^2]^* \}_{u=D}\right]^2\right\}}{\left\{\frac{\partial^2}{\partial u^2} [ |T_s^1|^2 + |T_s^2|^2 + 2\operatorname{Re}(T_s^1 T_s^{2*}) ]_{u=D}\right\}^2} + \frac{E\left\{\left[\frac{2}{r_2} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial u} \{ [T_s^1 + T_s^2] \times [T_{n_2}^1 + T_{n_2}^2]^* \}_{u=D}\right]^2\right\}}{\left\{\frac{\partial^2}{\partial u^2} [ |T_s^1|^2 + |T_s^2|^2 + 2\operatorname{Re}(T_s^1 T_s^{2*}) ]_{u=D}\right\}^2}, \quad (33)$$

时, 它们对时差估值均方差的影响也是相互独立的. 比较(33)式等号右边两项可见, 参考信号中的噪声  $n_1(t)$  和回波信号中的噪声  $n_2(t)$  引起的估计均方差在形式上是一样的, 因此对它们的分析过程也是一样的. 只需详细分析推导其中一项的简化表达式就可相应推导得到另外一项的计算公式. 下面以回波信号噪声引起的估计均方差推导为例来进行分析.

根据(19)–(21)三式的结果知道

(33)式说明, 当噪声  $n_1(t)$  与  $n_2(t)$  是统计独立的噪声随机过程

$$\frac{E\left\{\left[\frac{2}{r_2} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial u} \{ [T_s^1 + T_s^2] \cdot [T_{n_2}^1 + T_{n_2}^2]^* \}_{u=D}\right]^2\right\}}{\left\{\frac{\partial^2}{\partial u^2} [ |T_s^1|^2 + |T_s^2|^2 + 2\operatorname{Re}(T_s^1 T_s^{2*}) ]_{u=D}\right\}^2} =$$

$$\frac{\left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left\{ 2\operatorname{Re} [e^{-j\pi\alpha_1} D \varphi_{s1}^{a_1}(u-D) \varphi_{n_2,1}^{a_2}(u)]^* \right\} + 2\operatorname{Re} [e^{-j\pi\alpha_2} D \varphi_{s2}^{a_2}(u-D) \varphi_{n_2,2}^{a_1}(u)]^* \right] + 2\operatorname{Re} [e^{-j\pi\alpha_1} D \varphi_{s1}^{a_1}(u-D) \varphi_{n_2,2}^{a_2}(u)]^* \right\} + 2\operatorname{Re} [e^{-j\pi\alpha_2} D \varphi_{s2}^{a_2}(u-D) \varphi_{n_2,1}^{a_1}(u)]^* \right\}^2_{u=D}}{\left\{ r_2^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left\{ | \varphi_{s1}^{a_1}(u-D) |^2 + | \varphi_{s2}^{a_2}(u-D) |^2 + 2\operatorname{Re} [e^{j\pi(\alpha_2 - \alpha_1)} D \varphi_{s1}^{a_1}(u-D) \varphi_{s2}^{a_2}(u-D)]^* \right\} \right]_{u=D} \right\}^2}, \quad (34)$$

由于

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} [R_{s_2}^{a_2}(\tau_2 - u) (R_{s_1}^{a_1}(\tau_1 - u))^*] = R_{s_2}^{a_2}(\tau_2 - u) \frac{\partial^2}{\partial u^2} (R_{s_1}^{a_1}(\tau_1 - u))^* + (R_{s_1}^{a_1}(\tau_1 - u))^* \frac{\partial^2}{\partial u^2} R_{s_2}^{a_2}(\tau_2 - u) + 2 \frac{\partial}{\partial u} R_{s_2}^{a_2}(\tau_2 - u) \frac{\partial}{\partial u} (R_{s_1}^{a_1}(\tau_1 - u))^*, \quad (35)$$

$$\left\{ \iint_{(-\infty, \infty)} R_{s_1}^{a_1}(\tau_1 - D) (R_{s_2}^{a_2}(\tau_2 - D))^* \frac{\partial}{\partial u} (R_{s_1}^{a_1}(\tau_1 - u))^* \frac{\partial}{\partial u} R_{s_2}^{a_2}(\tau_2 - u) d\tau_2 d\tau_1 \right\}_{u=D} = 4\pi^2 \int_{(-\infty, \infty)} |f|^2 |S_{s_1}^{a_1}(f)|^2 df \int_{(-\infty, \infty)} |f|^2 |S_{s_2}^{a_2}(f)|^2 df, \quad (36)$$

$$\left\{ \iint_{(-\infty, \infty)} R_{s_1}^{a_1}(\tau_1 - D) (R_{s_2}^{a_2}(\tau_2 - D))^* (R_{s_1}^{a_1}(\tau_1 - u))^* \frac{\partial^2}{\partial u^2} R_{s_2}^{a_2}(\tau_2 - u) d\tau_2 d\tau_1 \right\}_{u=D} = -4\pi^2 \varphi_{s_1}^{a_1}(0) \int_{(-\infty, \infty)} f^2 |S_{s_2}^{a_2}(f)|^2 df, \quad (37)$$

$$\left\{ \iint_{(-\infty, \infty)} R_{s_1}^{a_1}(\tau_1 - D) (R_{s_2}^{a_2}(\tau_2 - D))^* R_{s_1}^{a_1}(\tau_2 - u) \frac{\partial^2}{\partial u^2} (R_{s_1}^{a_1}(\tau_1 - u))^* d\tau_2 d\tau_1 \right\}_{u=D} = -4\pi^2 \varphi_{s_2}^{a_2}(0) \int_{(-\infty, \infty)} f^2 |S_{s_1}^{a_1}(f)|^2 df, \quad (38)$$

于是由(35)–(38)式知道

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} \operatorname{Re} [e^{j\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D} \varphi_{s_1}^{a_1}(u-D) \varphi_{s_2}^{a_2}(u-D)]^* \right\}_{u=D} = 4\pi^2 \cos[\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D] \cdot \left[ 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 |S_{s_1}^{a_1}(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 |S_{s_2}^{a_2}(f)|^2 df - \varphi_{s_1}^{a_1}(0) \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |S_{s_2}^{a_2}(f)|^2 df - \varphi_{s_2}^{a_2}(0) \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |S_{s_1}^{a_1}(f)|^2 df \right], \quad (39)$$

并且由(39)式知道

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} | \varphi_{s_1}^{a_1}(u-D) |^2 \right)_{u=D} = 8\pi^2 \left[ \left| \int_{(-\infty, \infty)} |f|^2 |S_{s_1}^{a_1}(f)|^2 df \right|^2 - \varphi_{s_1}^{a_1}(0) \int_{(-\infty, \infty)} f^2 |S_{s_1}^{a_1}(f)|^2 df \right], \quad (40)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} | \varphi_{s_2}^{a_2}(u-D) |^2 \right)_{u=D} = 8\pi^2 \left[ \left| \int_{(-\infty, \infty)} |f|^2 |S_{s_2}^{a_2}(f)|^2 df \right|^2 - \varphi_{s_2}^{a_2}(0) \int_{(-\infty, \infty)} f^2 |S_{s_2}^{a_2}(f)|^2 df \right], \quad (41)$$

令  $B_{a_i}^2$  表示谱相关函数  $|S_{a_i}^i(f)|^2$  的二阶中心矩,  $\bar{f}_{a_i}$  表示  $|S_{a_i}^i(f)|^2$  的一阶原点矩,  $\varphi_{a_i}^i(0)$  为循环相关函数  $R_{a_i}^i(\tau)$  的能量, 则

$$\varphi_{a_i}^i(0) \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |R_{a_i}^i(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |S_{a_i}^i(f)|^2 df, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (42)$$

$$\bar{f}_{a_i} \stackrel{\Delta}{=} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f |S_{a_i}^i(f)|^2 df}{\varphi_{a_i}^i(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (43)$$

$$B_{a_i}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\bar{f} - \bar{f}_{a_i})^2 |S_{a_i}^i(f)|^2 df}{\varphi_{a_i}^i(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (44)$$

利用(42)~(44)式的结果, (34)式分母可简化成下面的形式

$$\left\{ \alpha^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial u^2} \{ | \varphi_{a_1}^1(u-D) |^2 + | \varphi_{a_2}^2(u-D) |^2 + 2\text{Re} [ e^{j\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D} \varphi_{a_1}^1(u-D) \langle \varphi_{a_2}^2(u-D) \rangle^* ] \} \right]_{u=D} \right\}^2 = 64\pi^4 \alpha^4 \{ \varphi_{a_1}^1(0) B_{a_1}^2 [ \varphi_{a_1}^1(0) + \varphi_{a_2}^2(0) \cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D) ] + \varphi_{a_2}^2(0) B_{a_2}^2 [ \varphi_{a_2}^2(0) + \varphi_{a_1}^1(0) \cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D) ] + \varphi_{a_1}^1(0) \varphi_{a_2}^2(0) \cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D) (\bar{f}_{a_1} - \bar{f}_{a_2})^2 \}^2, \quad (45)$$

下面对(34)式分子进行化简. 由于

$$\left[ \frac{\partial}{\partial u} \{ [ e^{-j\pi\alpha_1 D} \varphi_{a_1}^1(u-D) \langle \varphi_{a_2}^2(u) \rangle^* ] + [ e^{-j\pi\alpha_2 D} \varphi_{a_2}^2(u-D) \langle \varphi_{a_1}^1(u) \rangle^* ] + [ e^{-j\pi\alpha_1 D} \varphi_{a_1}^1(u-D) \langle \varphi_{a_2}^2(u) \rangle^* ] + [ e^{-j\pi\alpha_2 D} \varphi_{a_2}^2(u-D) \langle \varphi_{a_1}^1(u) \rangle^* ] \} \right]_{u=D} = [ e^{-j\pi\alpha_1 D} \varphi_{a_1}^1(0) + e^{-j\pi\alpha_2 D} \varphi_{a_2}^2(0) ] \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi_{a_2}^2(u) \rangle^* \right]_{u=D} + \left[ \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi_{a_1}^1(u) \rangle^* \right]_{u=D} \right\}, \quad (46)$$

从而有

$$2\text{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \{ \alpha e^{-j\pi\alpha_1 D} \varphi_{a_1}^1(u-D) \langle \varphi_{a_2}^2(u) \rangle^* + \alpha e^{-j\pi\alpha_2 D} \varphi_{a_2}^2(u-D) \langle \varphi_{a_1}^1(u) \rangle^* + \alpha e^{-j\pi\alpha_1 D} \varphi_{a_1}^1(u-D) \langle \varphi_{a_2}^2(u) \rangle^* + \alpha e^{-j\pi\alpha_2 D} \varphi_{a_2}^2(u-D) \langle \varphi_{a_1}^1(u) \rangle^* \} \right]_{u=D} = \alpha [ e^{-j\pi\alpha_1 D} \varphi_{a_1}^1(0) + e^{-j\pi\alpha_2 D} \varphi_{a_2}^2(0) ] \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi_{a_2}^2(u) \rangle^* \right]_{u=D} + \left[ \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi_{a_1}^1(u) \rangle^* \right]_{u=D} \right\} + \alpha [ e^{j\pi\alpha_1 D} \varphi_{a_1}^1(0) + e^{j\pi\alpha_2 D} \varphi_{a_2}^2(0) ] \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi_{a_2}^2(u) \rangle \right]_{u=D} + \left[ \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi_{a_1}^1(u) \rangle \right]_{u=D} \right\}, \quad (47)$$

于是

$$E \left\{ 2\text{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \{ \alpha e^{-j\pi\alpha_1 D} \varphi_{a_1}^1(u-D) \langle \varphi_{a_2}^2(u) \rangle^* + \alpha e^{-j\pi\alpha_2 D} \varphi_{a_2}^2(u-D) \langle \varphi_{a_1}^1(u) \rangle^* + \alpha e^{-j\pi\alpha_1 D} \varphi_{a_1}^1(u-D) \langle \varphi_{a_2}^2(u) \rangle^* + \alpha e^{-j\pi\alpha_2 D} \varphi_{a_2}^2(u-D) \langle \varphi_{a_1}^1(u) \rangle^* \} \right]_{u=D} \right\}^2 = 4\alpha^2 [ (\varphi_{a_1}^1(0))^2 + (\varphi_{a_2}^2(0))^2 + 2\cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D) \varphi_{a_1}^1(0) \varphi_{a_2}^2(0) ] \times \left\{ E \left[ \left| \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi_{a_2}^2(u) \rangle^* \right|_{u=D}^2 \right] + E \left[ \left| \frac{\partial}{\partial u} \langle \varphi_{a_1}^1(u) \rangle^* \right|_{u=D}^2 \right] \right\} \quad (48)$$

$$E \left\{ 2\text{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \{ \alpha e^{-j\pi\alpha_1 D} \varphi_{a_1}^1(u-D) \langle \varphi_{a_2}^2(u) \rangle^* + \alpha e^{-j\pi\alpha_2 D} \varphi_{a_2}^2(u-D) \langle \varphi_{a_1}^1(u) \rangle^* + \alpha e^{-j\pi\alpha_1 D} \varphi_{a_1}^1(u-D) \langle \varphi_{a_2}^2(u) \rangle^* + \alpha e^{-j\pi\alpha_2 D} \varphi_{a_2}^2(u-D) \langle \varphi_{a_1}^1(u) \rangle^* \} \right]_{u=D} \right\}^2 = 16\pi^2 \alpha^2 [ (\varphi_{a_1}^1(0))^2 + (\varphi_{a_2}^2(0))^2 + 2\cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D) \varphi_{a_1}^1(0) \varphi_{a_2}^2(0) ] \times [ K_{a_1}^2 \varphi_{a_1}^1(0) (B_{a_1}^2 + \bar{f}_{a_1}^2) + K_{a_2}^2 \varphi_{a_2}^2(0) (B_{a_2}^2 + \bar{f}_{a_2}^2) ], \quad (49)$$

其中  $K_{a_1}^2$  和  $K_{a_2}^2$  表示分别取循环频率为  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  时近似白噪声  $\varphi_{a_1}^1(u)$ ,  $\varphi_{a_2}^2(u)$  的功率谱密度, 且

$$K_{a_i}^2 \approx k_i N_0 / (2T), \quad i = 1, 2, \quad (50)$$

而  $k_i$  是信号  $s(t) e^{-j\pi\alpha_i t}$  功率谱等效成矩形时的矩形幅度<sup>[4,5]</sup>,  $T$  为信号积累时间长度,  $N_0/2$  是白噪声的功率谱密度.

根据(45), (49)两式结果可得对时延的估计均方误差为

$$\frac{E \left\{ \left[ \frac{2}{T} \text{Re} \frac{\partial}{\partial u} \{ [ T_s^1 + T_s^2 ] \times [ T_{a_1}^1 + T_{a_2}^2 ]^* \} \right]_{u=D} \right\}^2}{\left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} [ | T_s^1 |^2 + | T_s^2 |^2 + 2\text{Re}(T_s^1 T_s^2) ]_{u=D} \right\}^2} \approx \frac{[(\varphi_{a_1}^1(0))^2 + (\varphi_{a_2}^2(0))^2 + 2\cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D) \varphi_{a_1}^1(0) \varphi_{a_2}^2(0)] \times [K_{a_1}^2 \varphi_{a_1}^1(0) (B_{a_1}^2 + \bar{f}_{a_1}^2) + K_{a_2}^2 \varphi_{a_2}^2(0) (B_{a_2}^2 + \bar{f}_{a_2}^2)]}{4\pi^2 r_b^2 \{ \varphi_{a_1}^1(0) B_{a_1}^2 [ \varphi_{a_1}^1(0) + \varphi_{a_2}^2(0) \cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D) ] + \varphi_{a_2}^2(0) B_{a_2}^2 [ \varphi_{a_2}^2(0) + \varphi_{a_1}^1(0) \cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D) ] + \varphi_{a_1}^1(0) \varphi_{a_2}^2(0) \cos(\pi(\alpha_2 - \alpha_1)D) (\bar{f}_{a_1} - \bar{f}_{a_2})^2 \}^2}, \quad (51)$$

与上相同的分析推导过程不难求得参考信号中噪声引起的估值均方误差为



$$E \left\{ \left[ \frac{2}{r_1} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial u} \{ [T_s^1 + T_s^2] \times [T_{n_1}^1 + T_{n_1}^2]^* \}_{u=D} \right]^2 \right\} \approx \frac{\left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} [ |T_s^1|^2 + |T_s^2|^2 + 2\operatorname{Re}(T_s^1 T_s^{2*}) ]_{u=D} \right\}^2}{5[(\varphi_r^{a_1}(0))^2 + (\varphi_r^{a_2}(0))^2 + 2\cos(\pi(a_2 - a_1)D)\varphi_r^{a_1}(0)\varphi_r^{a_2}(0)] \times [K_{a_1}\varphi_r^{a_1}(0)(B_{a_1}^2 + \bar{J}_{a_1}^2) + K_{a_2}\varphi_r^{a_2}(0)(B_{a_2}^2 + \bar{J}_{a_2}^2)]} \cdot \frac{4\pi^2 r_1^2 \{ \varphi_{a_1}^2(0)B_{a_1}^2 [\varphi_{a_1}^2(0) + \varphi_{a_2}^2(0)\cos(\pi(a_2 - a_1)D)] + \varphi_{a_2}^2(0)B_{a_2}^2 [\varphi_{a_2}^2(0) + \varphi_{a_1}^2(0)\cos(\pi(a_2 - a_1)D)] + \varphi_{a_1}^2(0)\varphi_{a_2}^2(0)\cos(\pi(a_2 - a_1)D)(\bar{J}_{a_1} - \bar{J}_{a_2})^2 \}^2}{(52)}$$

将(51), (52)式代入到(33)式得到双循环频率循环时差估计子的估计均方误差, 如(28)式所示.

### 参 考 文 献

- 1 Gardner W A, Chen C-K, Signal-selective time-difference-of-arrival estimation for passive location of man-made signal sources in highly corruptive environments, part 1: Theory and method. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1992, 40(5): 1168—1184
- 2 Gardner W A, Chen C-K, Signal-selective time-difference-of-arrival estimation for passive location of man-made signal sources in highly corruptive environments, part 2: Algorithms and performance. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1992, 40(5): 1185—1197
- 3 Huang Z T, Zhou Y Y, Jiang W L. Joint estimation of Doppler and time-difference-of-arrival exploiting cyclostationary property. *IEE Proc-Radar Sonar Navig*, 2002, 149(4): 161—165
- 4 黄知涛, 周一宇, 姜文利. 循环相关匹配滤波器设计. *电子学报*, 2002, 30(12): 122—126
- 5 Gardner W A, Spooner C M, Signal interception: Performance advantages of cyclic-feature detectors. *IEEE Transactions on Communications*, 1992, 40(1): 149—159
- 6 Huang Z T, Jang W L, Zhou Y Y. Application of the multi-cycle estimator of Doppler and TDOA for passively locating targets exploiting non-co-operative transmitters. *Progress in Natural Science*, 2003, 13(10): 156—160
- 7 Gardner W A, Exploitation of spectral redundancy in Cyclostationary signals. *IEEE ASSP Magazine*, 1991, 8(4): 14—36